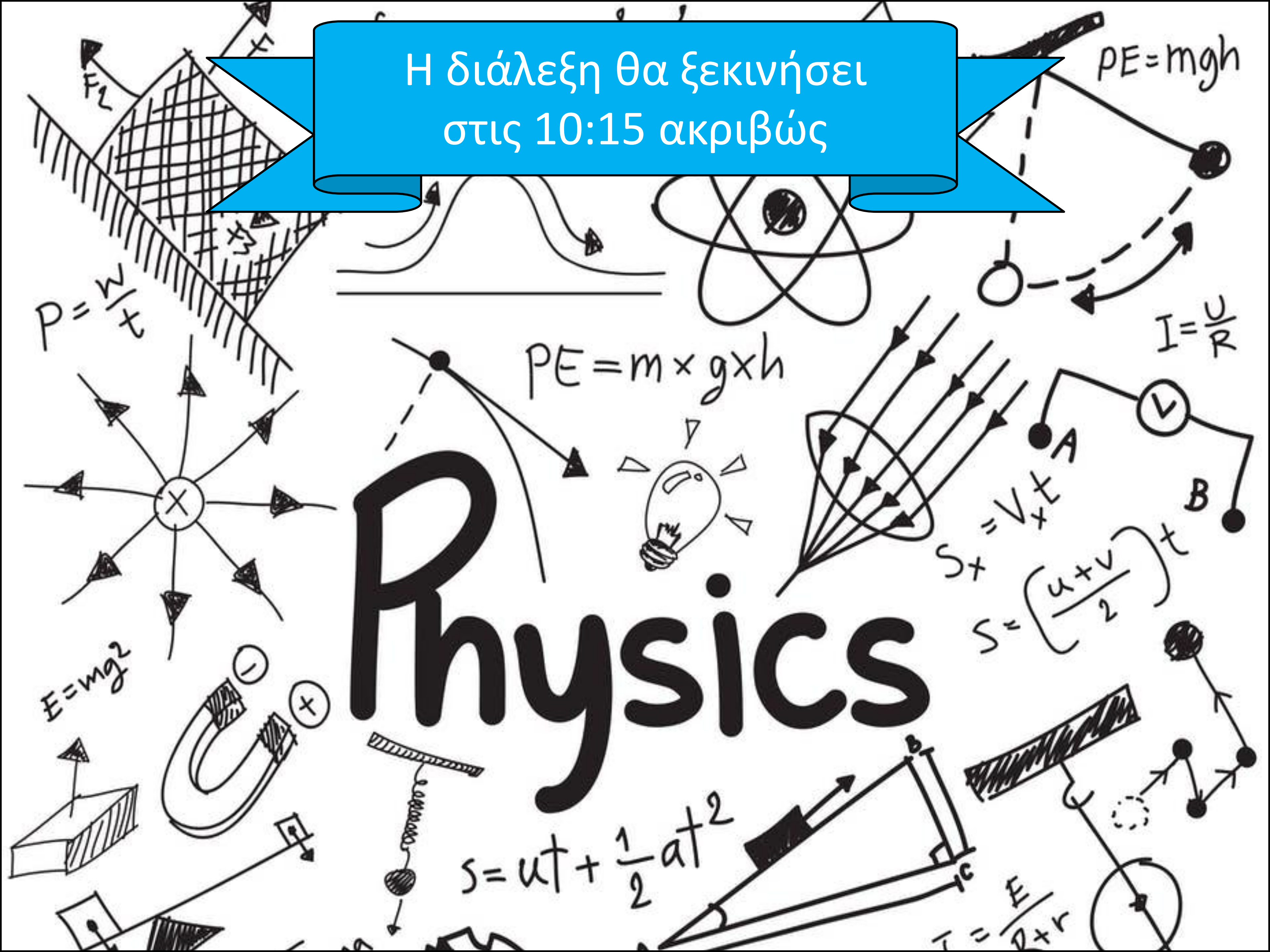
Η διάλεξη θα ξεκινήσει στις 10:15 ακριβώς



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- **Περιοδική κίνηση: ονομάζεται η κίνηση ενός σώματος που επιστρέφει στην αρχική του θέση ανά τακτά σταθερά χρονικά διαστήματα**

  - Πολλά παραδείγματα από την καθημερινότητα
    - Δείκτες ρολογιού
    - Κίνηση Γης γύρω από Ήλιο
    - Διαλέξεις Φυσικής ☺
    - Τροχιά δορυφόρου γύρω από τη Γη

  - Μαθηματικός ορισμός: $f(t) = f(t + T),\ T > 0, \forall\, t > 0$ περιοδος

- **Μηχανικό κύμα**: κύμα που απαιτεί κάποιο μέσο για τη διάδοσή του

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- **Απλή αρμονική κίνηση**: περιοδική κίνηση που συμβαίνει συχνά σε μηχανικά συστήματα, όταν η δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι ***ανάλογη της θέσης του σώματος***, σε σχέση με μια θέση ισορροπίας

- Όλες οι περιοδικές κινήσεις μπορούν να μοντελο-ποιηθούν ως άθροισμα απλών αρμονικών κινήσεων

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

- Πολλά φυσικά φαινόμενα γίνονται κατανοητά μέσα από τις έννοιες των ταλαντώσεων και των κυμάτων
- Παραδείγματα:
  - Οι ουρανοξύστες και οι γέφυρες σχεδιάζονται έτσι ώστε να ταλαντώνονται
  - Η ραδιοφωνία και η τηλεόραση βασίζουν τη λειτουργία τους σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα και στον τρόπο διάδοσής τους
  - Η Φυσική στο ατομικό της επίπεδο περιέχει πληροφορία που φέρεται από κύματα
  - Ο ήχος και η φωνή παράγονται από κάποιου είδους ταλαντώσεις

Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

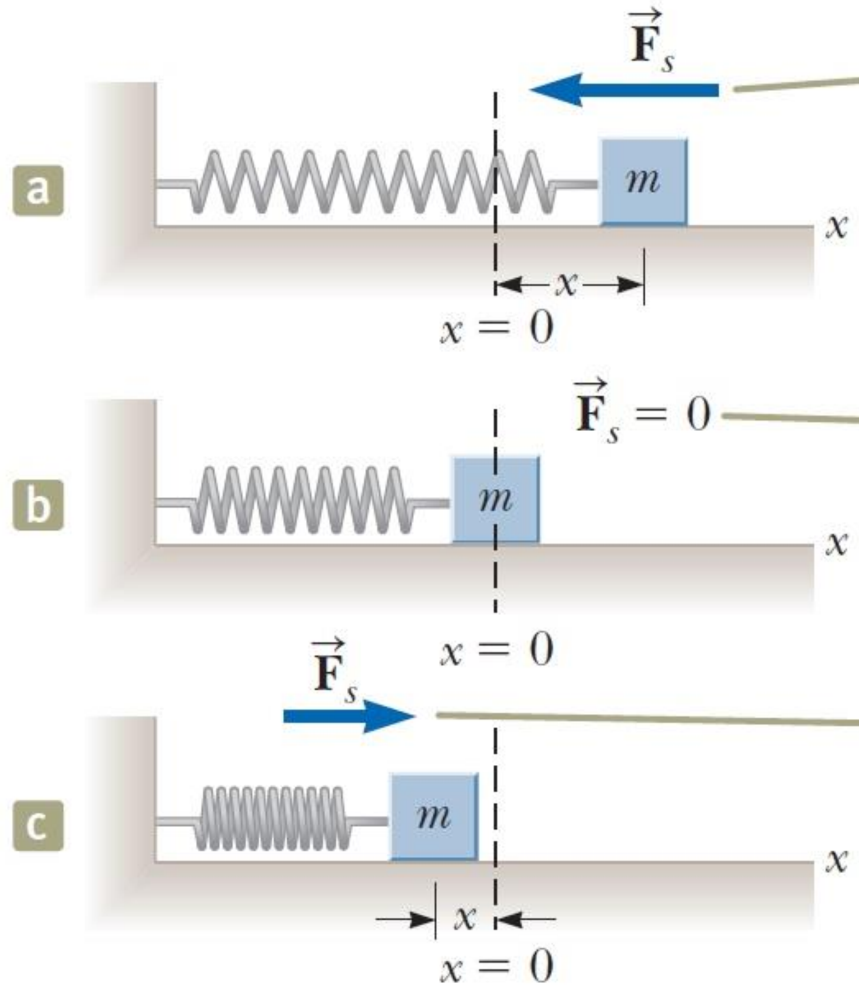
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **<u>Ορισμός:</u> Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του σώματος, η κίνηση που πραγματοποιεί το σώμα λέγεται Απλή Αρμονική Κίνηση / Ταλάντωση** (ΑΑΤ)

- Γνωρίζετε ήδη μια τέτοια κίνηση (ποια;) ☺

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο στο σώμα δρα με κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο είναι μηδενική.

Όταν το σώμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά της θέσης ισορροπίας, η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο δρα με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

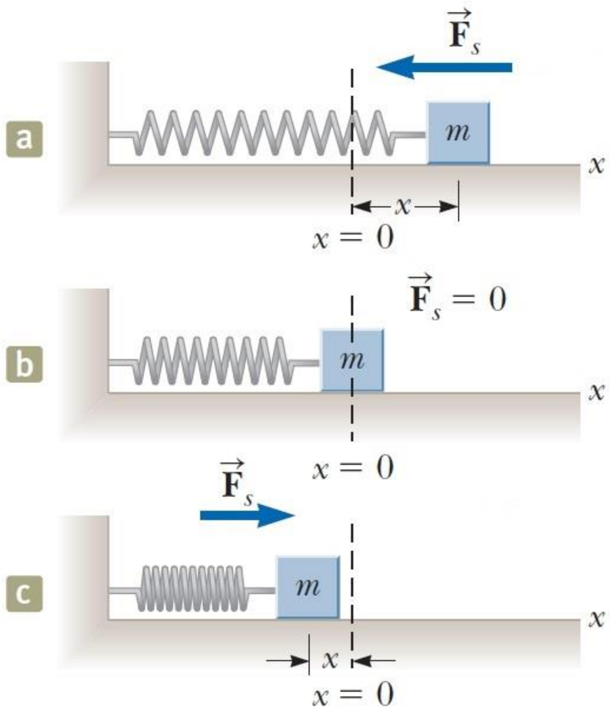
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σώμα σε κίνηση

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_s = -kx = ma_x \Leftrightarrow \boxed{a_x = -\frac{k}{m}x}$$

- **Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της θέσης (μετατόπισης από θέση ισορροπίας)**
- **Η κατεύθυνσή της είναι αντίθετη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας**

Απλή Αρμονική Κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Εξισώσεις απλής αρμονικής ταλάντωσης**

$$a_x = -\frac{k}{m}x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

- Αν θέσουμε $\omega^2 = \frac{k}{m}$, τότε έχουμε

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

Διαφορική εξίσωση

- Λύση διαφορικής εξίσωσης

Φάση μετατόπισης ή αρχική φάση

Φάση

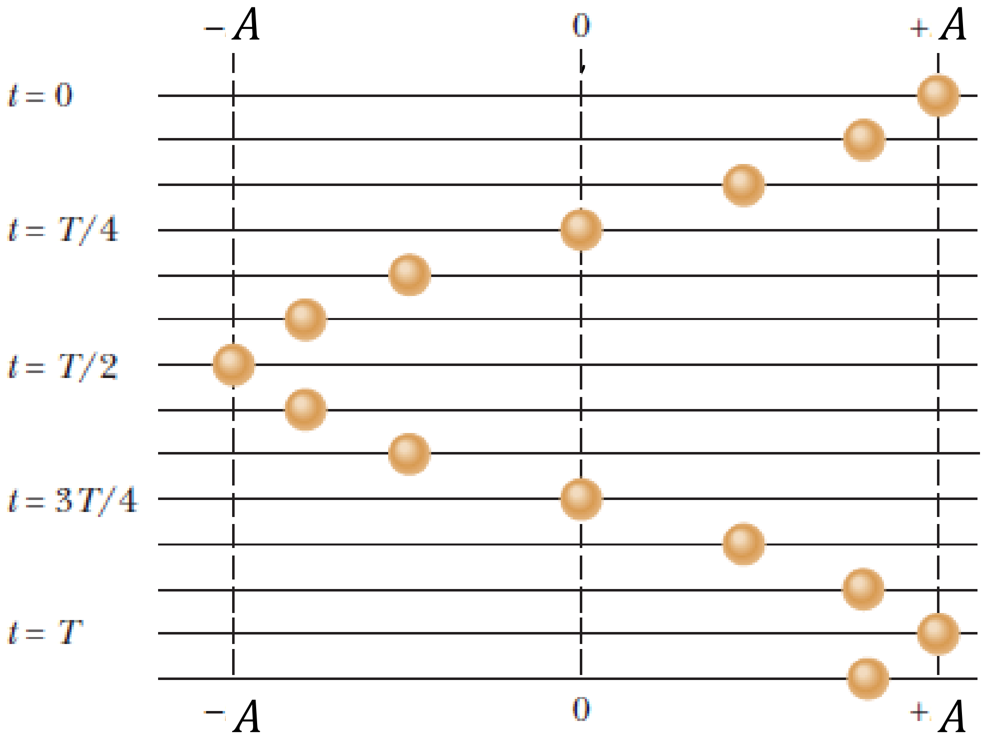
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Πλάτος ταλάντωσης

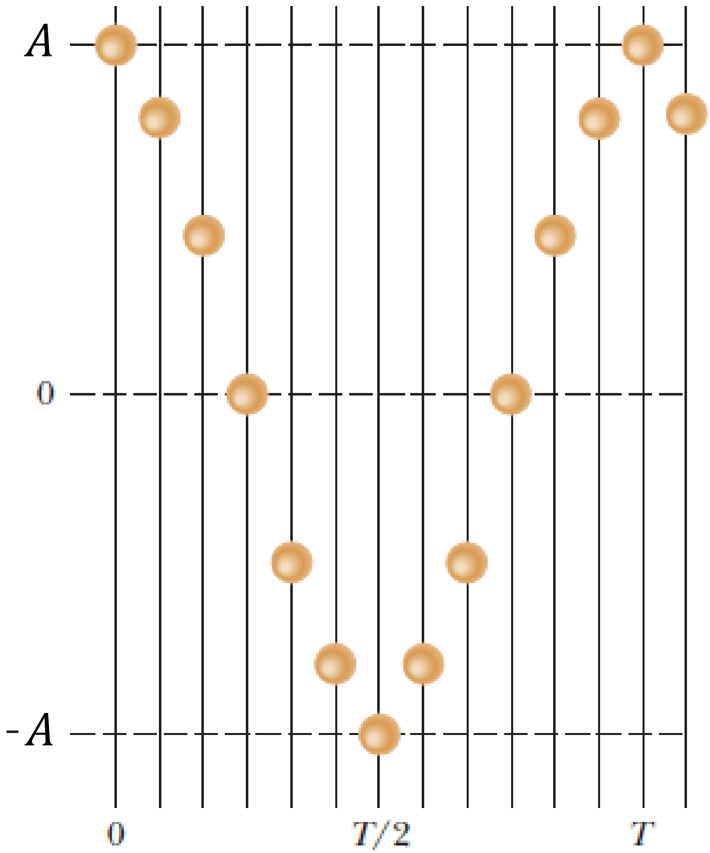
Συχνότητα ταλάντωσης

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ένα σώμα ταλαντώνεται δεξιά κι αριστερά ακολουθώντας απλή αρμονική ταλάντωση.



Αν "στρέψουμε" την κίνηση κατακόρυφα, παρατηρούμε οτι σχηματίζεται ένα συνημίτονο!



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Γωνιακή Συχνότητα ταλάντωσης**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

  - Μετριέται σε rad/s
  - Ορίζει πόσο γρήγορα ταλαντώνεται το σώμα

- **Περίοδος**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

  - Χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση

- **Συχνότητα (σε Hertz)**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

  - Ορίζει το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελούνται στη μονάδα του χρόνου

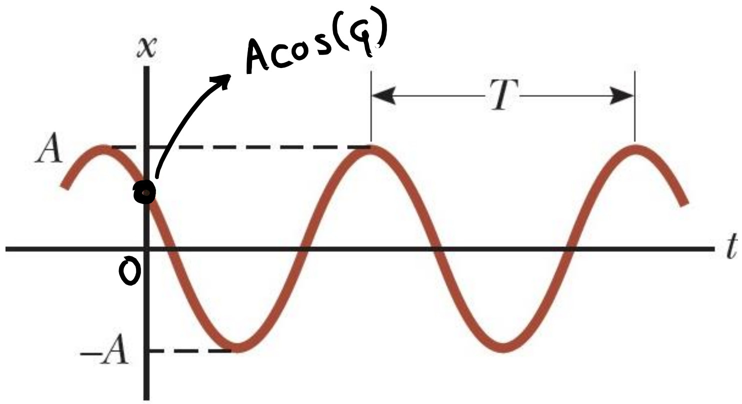
- **Σχέση με γωνιακή συχνότητα**

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

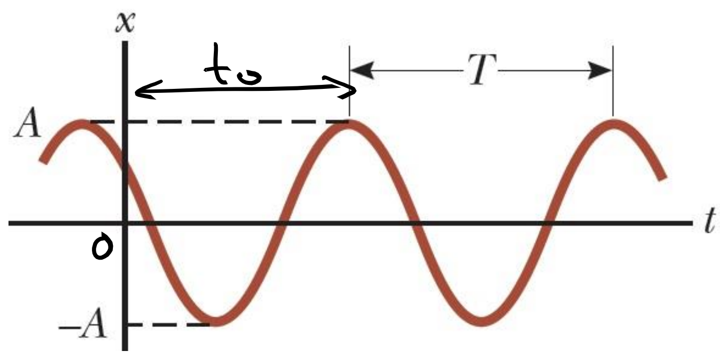
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

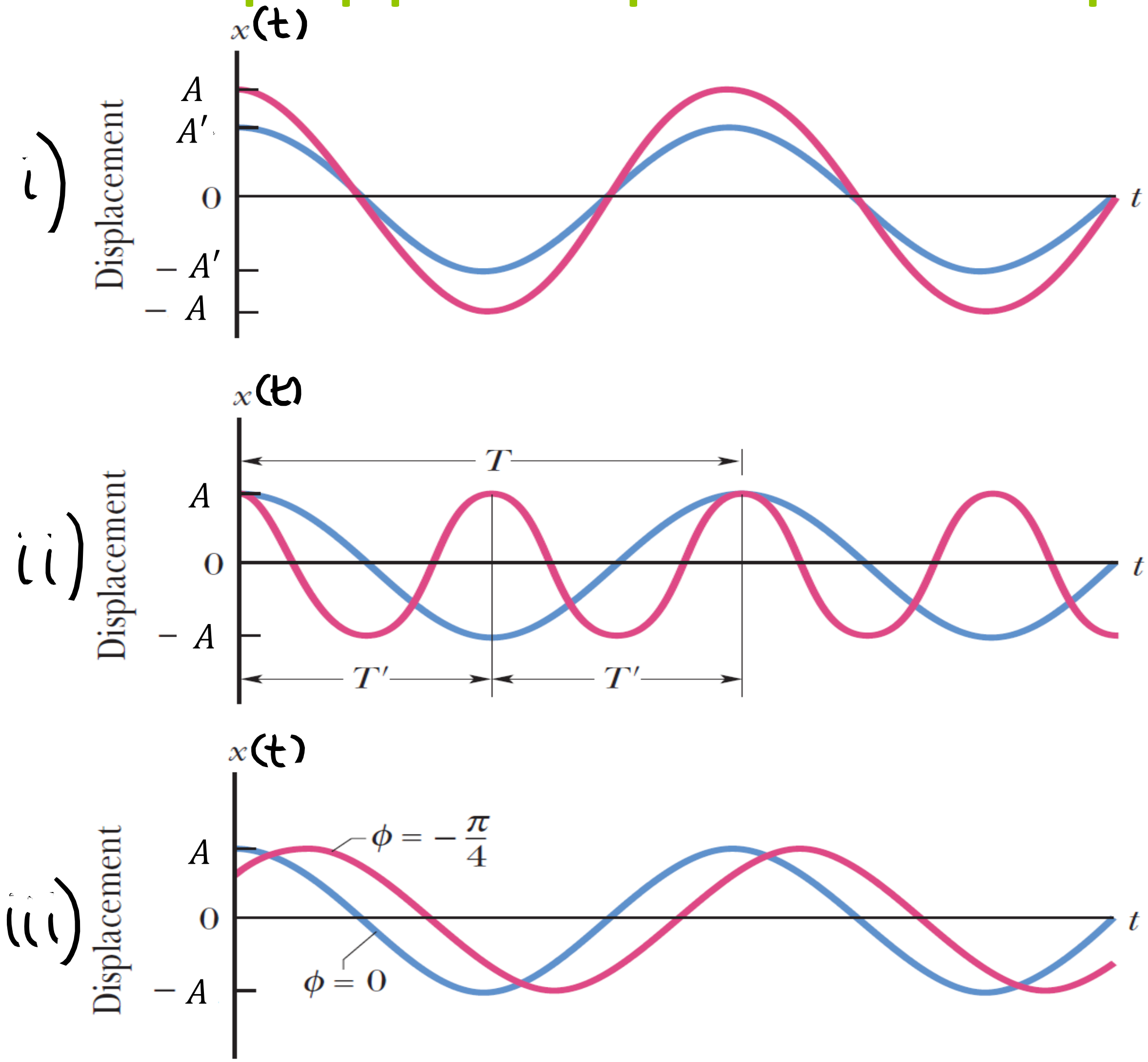
- **Σταθερά αρχικής φάσης φ**
- Ορίζει την τιμή του συνημιτόνου τη στιγμή $t = 0$
  - $t = 0 \Rightarrow \mathrm{x}(0) = A\cos(\varphi)$
  - Εναλλακτικά, ορίζει τη θέση του σώματος όταν ξεκινάμε να μελετάμε την ταλάντωση



- $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
  $= A\cos(\omega(t + {}^{\varphi}/_{\omega}))$
  $= A\cos(\omega(t - t_0))$
- Η τιμή $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ ορίζει τη **χρονική** μετατόπιση σε δευτερόλεπτα του $x(t)$ από τη θέση όπου $t = 0$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση



A , ω , φ

ω ίδιο
φ ίδιο
A > A′ διαφ.

A ίδιο
ω αλλάζει
φ ίδιο

A ίδιο
ω ίδιο
φ αλλάζει

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Ταχύτητα & επιτάχυνση** απλής αρμονικής κίνησης

$$u = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = u(t)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = a(t)$$

- Μέγιστες τιμές

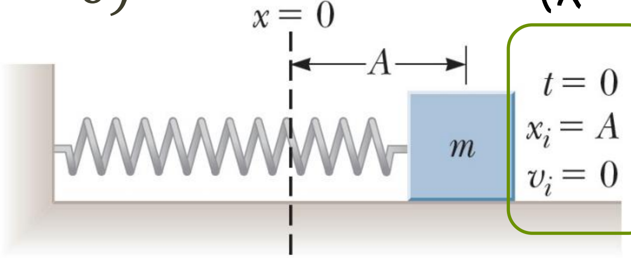
$$u_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \qquad a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$

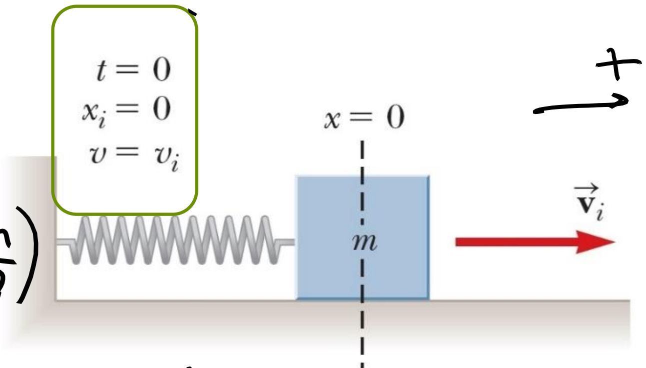
- **Πώς βρίσκουμε τις σταθερές A, φ, ω, της ταλάντωσης;**
  - Συχνότητα ω: εξαρτάται από k, m
  - Πλάτος, φάση: **αρχικές συνθήκες**! $(t = 0)$

Αρχ. Συνθ.



  - **Παράδειγμα 1**:
    - $x(0) = A\cos(\varphi) = A, \sim \varphi = 0$
    - $u(0) = -\omega A \sin(\varphi) = 0$
      - Δίνουν $\varphi = 0$

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

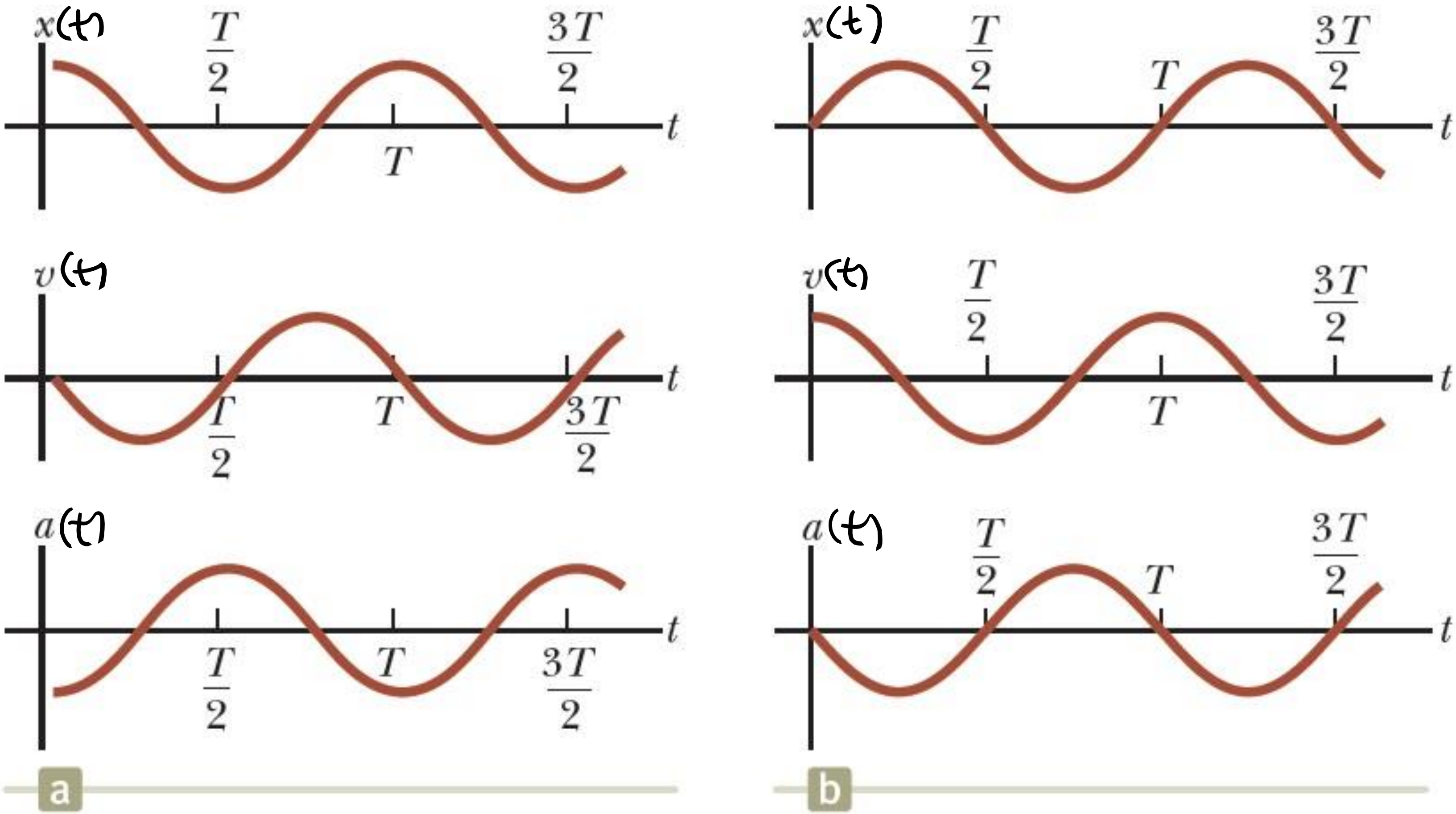


  - **Παράδειγμα 2**:
    - $x(0) = A\cos(\varphi) = 0,$ → $\pi/2$, → $-\pi/2$ (ή $\frac{3\pi}{2}$)
    - $u(0) = -\omega A \sin(\varphi) = u_i$
      - Δίνουν $\varphi = -\pi/2$

$\boxed{\text{Για } \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{u_i}{\omega}}$

$$x(t) = \overbrace{\frac{u_i}{\omega}}^{A}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \overbrace{\frac{u_i}{\omega}}^{A}\sin(\omega t) = A\sin(\omega t)$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

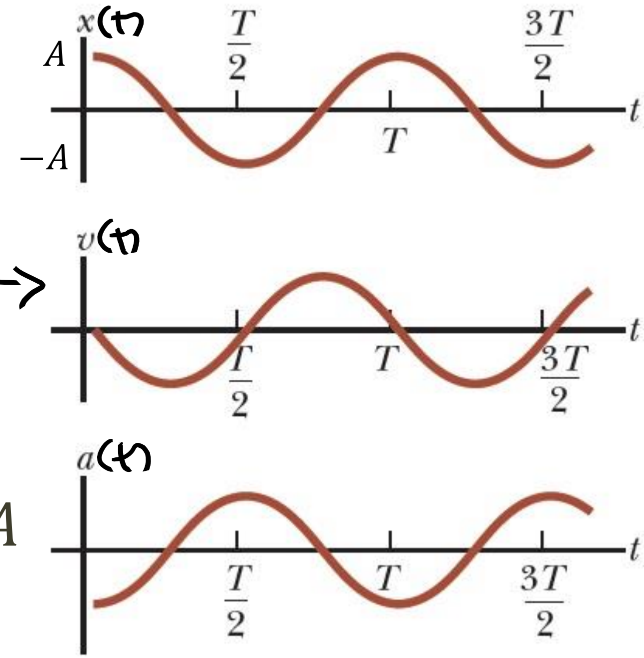


Θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση για (a) $t = 0, x(0) = A, u(0) = 0$ και (b) $t = 0, x(0) = 0, u(0) = u_i$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

θέση ισορροπίας

- Παρατηρήστε ότι:
- Η **μέγιστη** (κατ' απόλυτη τιμή) **ταχύτητα** συμβαίνει όταν $x = 0$
- Η **μέγιστη** (κατ' απόλυτη τιμή) **επιτάχυνση** συμβαίνει όταν $x = \pm A$

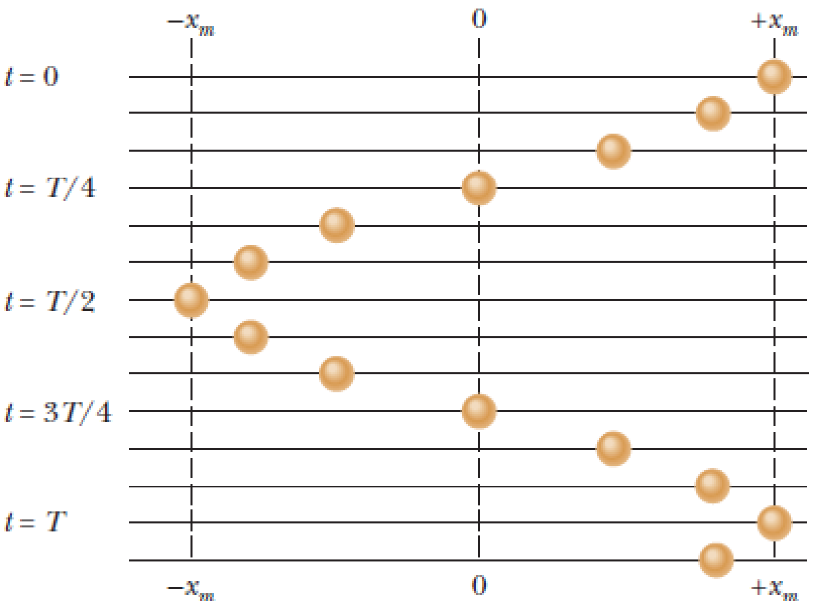


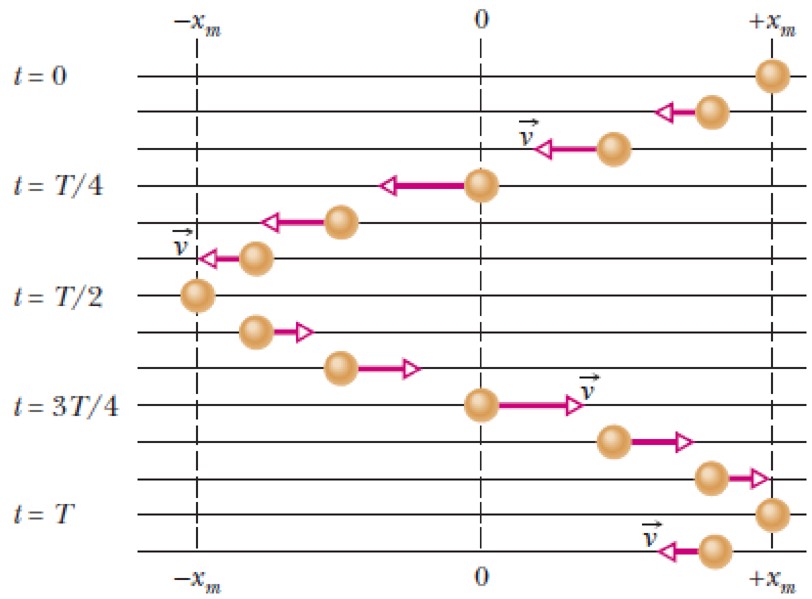
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ένα σώμα ταλαντώνεται δεξιά κι αριστερά ακολουθώντας απλή αρμονική ταλάντωση.

Η ταχύτητά του είναι μηδενική στις ακραίες θέσεις της κίνησης.

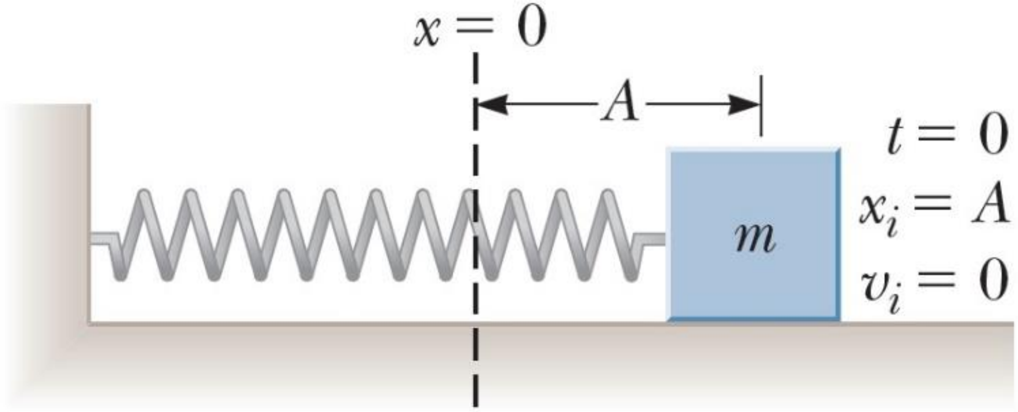
Η ταχύτητα είναι μέγιστη στη θέση ισορροπίας x=0





Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
    - Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
    - Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
    - Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.
    - Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

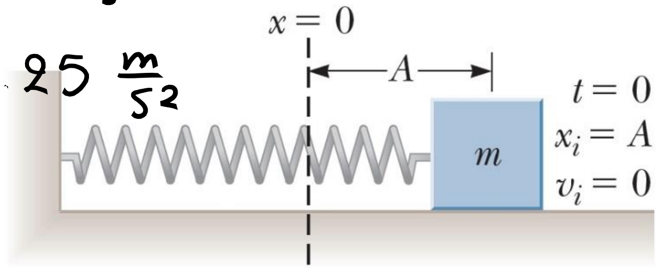
- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
    - Α) Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
    - Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
    - Γ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5\ \frac{rad}{s}$$

Α) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{1}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \frac{1}{5}\ s = \frac{2\pi}{5}\ s$

Β) Είναι $u_{max} = \omega A = 5 \cdot 0.05 = 0.25\ \frac{m}{s}$

Γ) Είναι $a_{max} = \omega^2 A = 25 \cdot 0.05 = 1.25\ \frac{m}{s^2}$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.
    - Δ) Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.

Ξέραμε ότι $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Είναι (για $t=0$) $x(0) =$

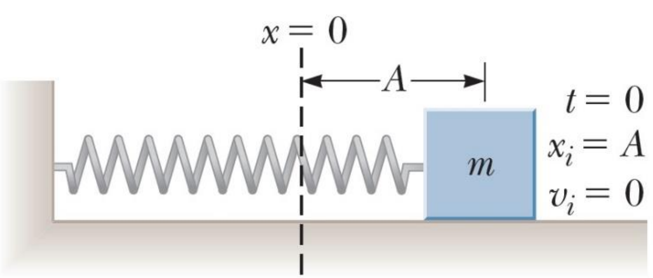
$= A\cos(\omega 0 + \varphi) = A\cos(\varphi) = x_i = A \Leftrightarrow \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0}$

Άρα λοιπόν:

$x(t) = 0.05\cos(5t + 0) = 0.05\cos(5t)$

$u(t) = -0.25\sin(5t)$

$\alpha(t) = -1.25\cos(5t)$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται **με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{u_i = -0.1}$ m/s**
    - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

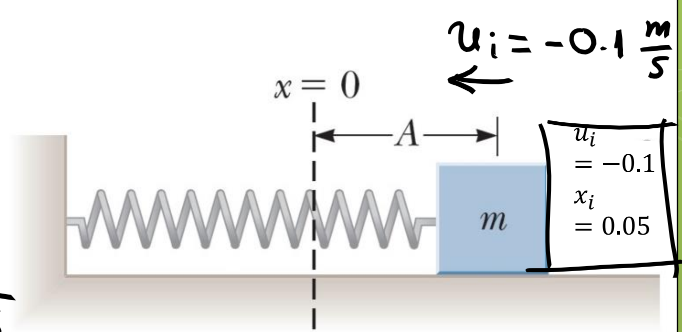
Για την περίοδο, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{5}$ sec

Για $u_{max} = \omega A$, $\alpha_{max} = \omega^2 A$? δε γνωρίζουμε το πλάτος A.

Από αρχικές συνθήκες:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = A\cos(\varphi) = x_i = 0.05 \\ v(0) = -\omega A\sin(\varphi) = -0.1 \end{array}\right\} \overset{(:)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(:)}{\Longrightarrow} -\overset{5}{\omega}\tan(\varphi) = -2 \Rightarrow \tan(\varphi) = \frac{2}{5}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 200 gr είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά είναι 5 N/m. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται **με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{u_i = -0.1}$ m/s**
    - Τι αλλάζει στα προηγούμενα ερωτήματα?

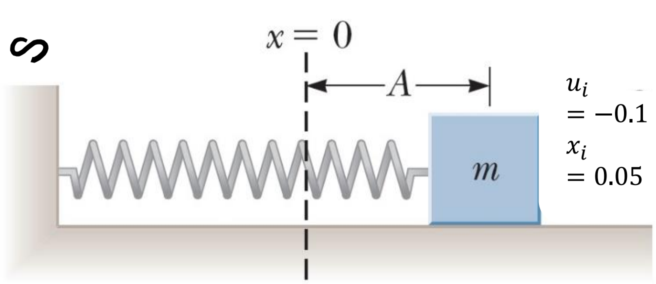
Άρα από $\tan(\varphi) = \frac{2}{5} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \simeq 0.12\pi$ rad

Οπότε $A\cos(\varphi) = 0.05 \Leftrightarrow A\cos(0.12\pi) = 0.05 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{0.05}{\cos(0.12\pi)} \simeq 0.054$ m. Άρα $u_{max} = \omega A = 0.269 \frac{m}{s}$

και $a_{max} = \omega^2 A = 1.35 \frac{m}{s^2}$, και τέλος

$$x(t) = 0.054\cos(5t + 0.12\pi)$$
$$u(t) = -0.269\sin(5t + 0.12\pi)$$
$$a(t) = -1.35\cos(5t + 0.12\pi)$$



Τέλος Διάλεξης